■研究紹介

ビームビームリミットとクラブ空洞

KEK 加速器研究施設
大 見　和 史
ohmi@post.kek.jp
2005 年 12 月 1 日

1　はじめに

KEKB ではルミノシティの大幅な向上を目指してクラブ空洞の設置が行われつつある。ここではクラブ空洞がどうしてルミノシティの向上に有効なのかを説明する。

このことを説明するためにビームビーム限界という現象についてまず述べなければならない。現象的にはビーム内の（陽）電子を増やしても、ビームサイズが肥大してしまい、ルミノシティが期待したように上がらないという状態である。この現象はビームサイズが何で決まるかという問題に帰着する。

一般にはクラブ空洞は衝突時のビーム同士の幾何学的な重なりを増やすことでルミノシティが上がると考えられているが、ビームサイズがビームビーム限界に達するような場合は単純に幾何学的にルミノシティを論じることは無意味である。交差して衝突しているビームのサイズと、正面衝突のそれと同じとは限らないからである。交差角がビームビームの力学そしてビームビーム限界にどのように影響するかを理解して、はじめてルミノシティを論じることができる。

2　衝突がない場合のビーム粒子の平衡分布

ビーム内の電子、陽電子は加速器の中をある中心軌道の周りを振動しながら回っている。（以下電子と表現するが陽電子も含む。）この運動をベータトロン振動という。ビームビームによるサイズ肥大は y（上下）方向によく見られる。これは y 方向のビームサイズが極端に小さいためである。そこでまず y 方向だけの運動を考える。（運動は y 方向だけの 1 自由度であるが、ビームビーム衝突はリングのある場所でしか起こらないので、力学の言葉で時間に依存した 1 自由度の系という。以下明記しないがすべて時間依存である。）y-p_y 方向と進行方向（s）だけを見ると、電子はトーラスの表面を巡るように運動している。そのトーラスの（リング内のある場所での）y-p_y 断面図をポアンカレプロットという。図 1 に加速器内の運動が線形で表される場合の衝突点を断面にとったときの電子の周回ごとの位相空間位置（ここでは角度と振幅である ϕ-$|y|$）のプロットを示す。ビーム内の各電子の振動の位相、振幅はまちまちだが、それぞれに周回ごと図のある振幅$|y|$の直線上のどこかを巡っている。電子の加速器一周あたりの振動位相（楕円上の角度位置）の進みをチューンと呼び、ある値に設定されている（一つのリングに入っているすべての電子で同じ）。ちなみに KEKB は水平方向：$(44.506 \sim 44.512)\times 2\pi$、垂直方向：$(43.535 \sim 43.580)\times 2\pi$ という値である。そのように運動している電子の平均振幅がビームサイズというわけである。

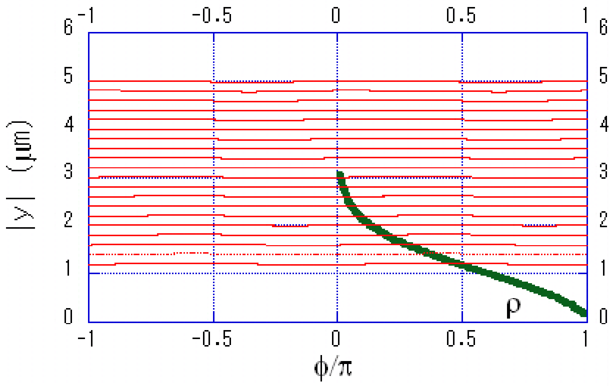

図 1　位相空間上の電子の運動を示すポアンカレプロット
加速器の世界では y-p_y 上で円（楕円）を描くことが多いが、ここでは位相角と振幅にとった。太線は電子の平衡分布で横軸が密度。図では 1mm-5mm の振幅の軌道が描かれている。

電子の振幅は全体的な放射光の放出によるエネルギー損失からくる減衰と、個々の光子によるランダムな励起とで決まる。減衰時間は 4000 周であり、励起は一周あたり 0.02μm の揺らぎを持つ。周回ごとに拡散係数 $<\Delta y^2>^{1/2} = 0.02\,\mu$m の酔歩運動をしつつ、$\delta y = y/4000$ の割合で減衰していく。図 1 にあるように電子が受ける力が線形であるならば、振幅（上下）方向に酔歩と減衰を繰り返し、最終的にビーム内電子の分布はガウス分布になり、

そのサイズは減衰と励起の平衡から決まる $<\Delta y^2>$ $=<2y\,\delta y>$ すなわち $<y^2>^{1/2}=0.02\times(4000/2)^{1/2}=1\,\mu\mathrm{m}$ となる。

3　ビーム衝突を考慮した平衡分布

KEKB のような衝突型加速器では電子、陽電子ビームは衝突点で x-y、特に y 方向に小さく絞られ衝突する。正反対の電荷を持った粒子同士が衝突するので、おのおののビーム内の粒子は収束力を受ける。この収束力により電子の振動の位相進みが速まる。また、このビームビーム力は大きな振幅では弱まるので（非線形力）、電子の位相の進みに広がりができる。ビーム強度が大きくなると、中心付近の電子の位相進みが速くなり、中心から離れた電子の位相はビームビーム力の影響を受けないからである。一般的に非線形力学において、周回ごとの位相進みが整数比 m/n の近傍で共鳴状態になり、その近傍でカオス的状態になる。位相広がりが大きくなると、電子の位相空間でのカオス領域が広がってくる。その様子をみるために、片方のビームを衝突点に静的な電荷分布として置き、電子の運動を追跡する計算機シミュレーションが行われる。これによって、衝突がある場合の図 1 に相当する位相空間プロットが得られる（図 2）。

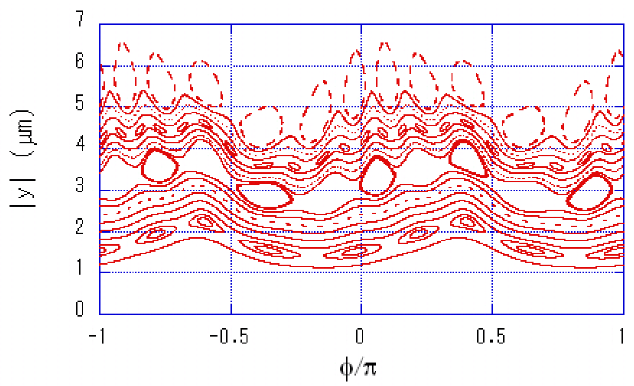

図 2　ビームビーム力を考慮したときの $x=0$ をもった電子の y 位相空間上の運動　　共鳴による島構造が見られる。

3.1　y 方向 1 自由度の場合の平衡分布

上述の y 方向のみの運動を考慮した平衡分布を考えよう。図 1 はもちろんのこと図 2 でも、粒子の位相空間での運動は共鳴の島構造を除いては単に位相方向に運動するだけで y 方向には単調増加的な運動はしない。1 自由度の系は本質的にビームサイズ肥大を起こしにくいのである。島構造があるためにその部分ではサイズの肥大はおこるが、時間がたつにつれて際限なく肥大するような現象は起こらないのである。酔歩運動があってはじめて電子は位相空間の線を横切ることができる。その場合島構造の閉曲線に沿って等密度線が描かれる。島近傍がカオスで埋め尽くされれば一様な密度になるであろう。この場合の平衡分布を解析的に表すことは不可能であるため、酔歩運動と減衰を考慮し、多数の電子を追跡し平衡ビームサイズを計算機で求めることが行われる。たとえば、図 3 にあるようなある領域で共鳴、カオスが強く、電子分布が一様に混ざり合ってしまう場合、分布はガウスから肩が張り出すような分布になることは想像できる。

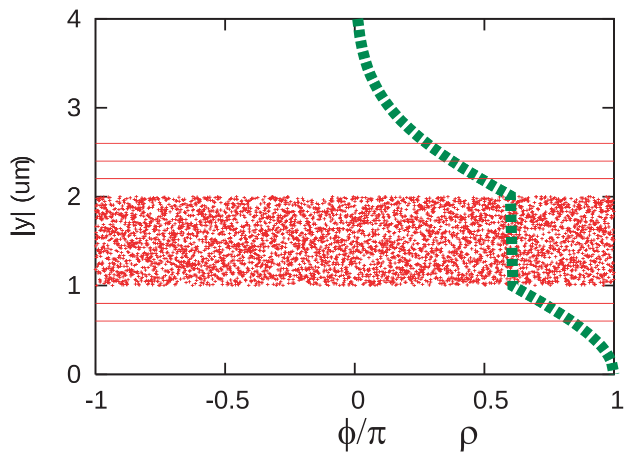

図 3　$1\sim2\,\mu\mathrm{m}$ の領域がカオス状態のときの予想される電子の分布（太線）

1 自由度系でも島やカオス領域によるビームサイズ肥大は原理的に起こりうるが、実際のビームビーム衝突系は y-p_y の 1 自由度で見る限り、さほど強いカオス的性質を持っているわけではない。図 2 にあるように、共鳴による島構造は見られるが、カオス特有のランダムな領域ははっきりとは見えない。実際 $x=0$ である電子の運動を追跡し、y 方向のみの酔歩、減衰運動を考慮し y 方向のビームサイズを求めると、大きな肥大は見られない。図 4 に時間によるビームサイズ肥大が 2 自由度系との比較で描かれている。より強い非線形を持った系（ビーム強度を数倍増やした 1 自由度系）ではカオスによって埋め尽くされる。その場合は 1 自由度系でもサイズ肥大がみられるが、現状の KEKB、SuperKEKB のパラメータでは多自由度による効果が支配的である。

3.2　x-y 方向 2 自由度の場合の平衡分布

実際のビームは x 方向の運動、分布と酔歩運動があるわけで、次のステップとして 2 自由度の問題を考える。シミュレーションでは x 方向の分布（それに対応する運動）だけを入れた場合と、酔歩、減衰運動まで入れた場合などを

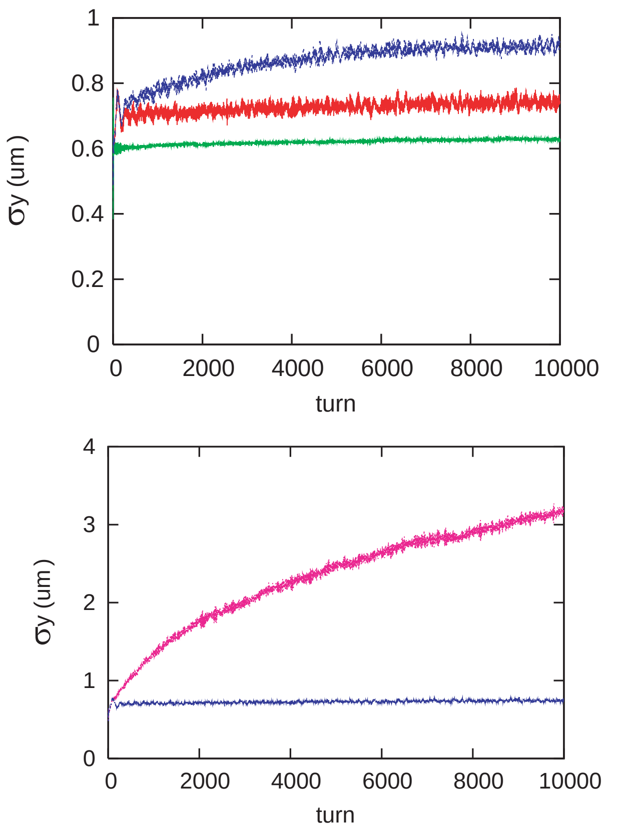

図 4　周回ごとのビームサイズの変化

上図は低い方から $x=0$ の運動、x 方向の運動はあるが x-y 両方向酔歩減衰をなくした場合、x 方向のみの酔歩減衰をなくした場合である。下図上は x-y 方向運動で酔歩減衰ありの場合、下は比較のための酔歩運動をなくした場合のプロットである。

比べ、どこにビーム肥大の本質があるか調べることができる。それぞれの場合を図 4 に示すように、何を考慮するかによりまったく違う結果が得られる。現実の世界は x, y ともに設計上のサイズを持った分布があり、酔歩、減衰運動をしているので、図 4 下のようになるはずである。このサイズ肥大が正面衝突でのビームビーム限界を与える。1 自由度の場合は肥大が小さいのは当然として、酔歩運動がなければ 2 自由度でもサイズ肥大は小さい。y 方向のサイズ肥大には y 方向ではなく x 方向の酔歩運動が重要な役割を果たしていることがわかる。水平 x 方向のサイズは $100\,\mu$m で拡散係数 $<\Delta x^2>^{1/2}=2\,\mu$m であり、$y$ 方向に比べかなり大きいことが重要であると思われる。

3.3　x-y-z 方向 3 自由度の場合の平衡分布

電子は x-y 方向だけでなく、進行方向に相対的に運動している（z）。振幅はこれらの自由度の中でもっとも大きく 7 mm 程度で、拡散係数も $<\Delta z^2>^{1/2}=0.2$ mm で圧倒的である。ビームビーム力は衝突点の近傍の数 mm で強さが大きく変わるので、z 方向の振動は x-y 方向の振動に影響を与えうる。z 方向の振動は自由度中最大なので小さな結合でも大きな効果になる可能性がある。この効果も計算機シミュレーションで考慮できる。結果だけを記すと、正面衝突では進行方向の運動を考慮してもビーム肥大は変わらない。つまり 3 自由度ではあるが、y 方向のビームサイズに関して 2 自由度と同じ振る舞いをしている。おそらくこのパラメータ領域での正面衝突では実質的に 2＋1 自由度に分離できているということができる。x-z 方向のサイズには変化が見えない。

4　交差角とクラブ衝突

さてそこで、次に交差角がある場合の衝突である。この場合は、x-z の運動が線形成分から混じり合う。先の正面衝突は最低次が x^2z^2 、y^2z^2、つまり 2＋1 自由度から 3 自由度へと増える可能性を示唆する。計算機シミュレーションによると（図 5）、この場合（有限交差角：3 自由度）では酔歩運動がなくてもビームサイズが大きくなる、図中 $<y^2>$ が周回ごとに単調に増加、つまり拡散する。2 あるいは 2＋1 自由度の場合は外的な拡散である酔歩運動があってはじめてビームサイズ肥大が起こるのと対照的である。このように自由度が増えるたびにビームサイズ肥大の可能性が高くなる、つまりビームビーム限界が低くなるということである。保存系において、近似的に保存量といえる、エミッタンス（サイズ）が拡散、肥大することはカオス理論の発達とともにアーノルドらによって指摘されてきた。

ビームビームの衝突系は保存系の拡散問題とクラブ空洞による、拡散の制御という点から非常に興味深い。

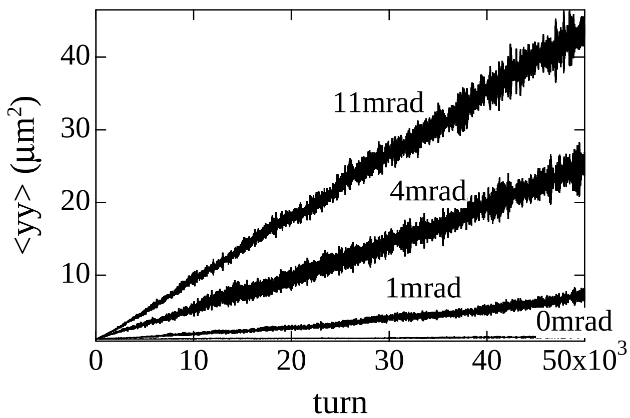

図 5　交差角の増加に対するビームサイズの肥大（拡散）

もう一つ KEKB の x 方向のチューンが 0.5 に非常に近いことにもふれておこう。チューンが 0.5 ということは衝突時の x 方向の位置が衝突ごとに位相が π、すなわち反対側の位置で衝突することを意味する。ビームビーム力は

$x \to -x$ に対して対称的なので、y 方向の運動が常に同じ $|x|$ 面上で行われ、実質 1 自由度になる。すなわち x-y の 2 自由度が1＋1自由度に分解されるのである。図 6 にチューン 0.5 のときの y 方向のビームサイズの振る舞いを示す。1 自由度の場合と同じく、ほとんどビームサイズが肥大していないのがわかる。実際の運転では諸々の事情（具体的には磁石の設定精度などのエラーに敏感になる）により 0.5 にすることは不可能である。しかし KEKB にはエラーなどを減らし、限りなく 0.5 に近づけることでルミノシティを上げてきた歴史がある。

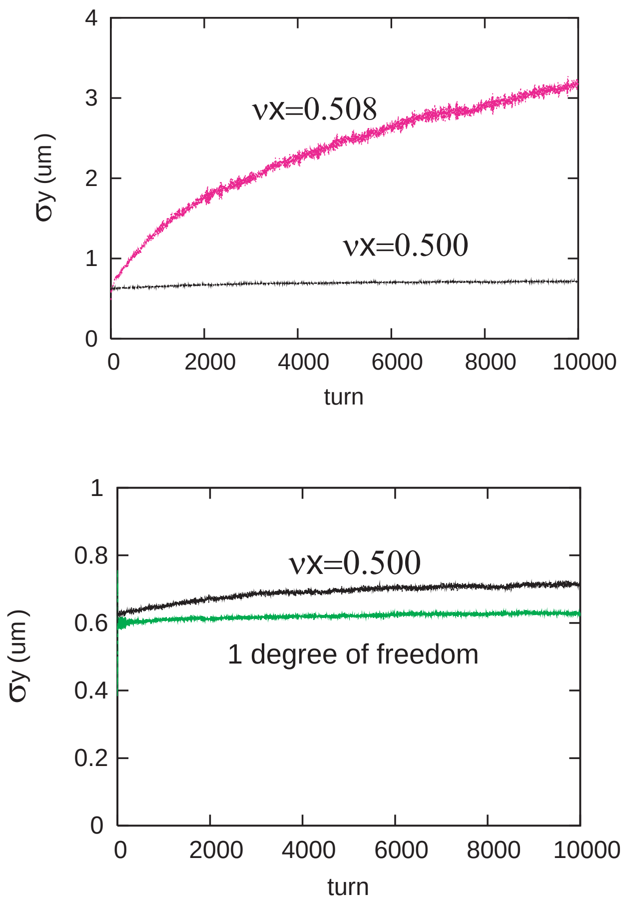

図 6　x 方向のチューンが 0.508 と 0.5 の場合の y 方向のビームサイズの振る舞い

下図ではチューン 0.5（上）と 1 自由度 $x = 0$ の場合（下）を比較している。

5　まとめ

ここまでの議論で、クラブ空洞はどんな働きをするか、クラブ衝突で（加速器－ビーム物理の観点から）何を目指しているかが分かっていただけたと思う。交差角衝突での 3 自由度の系をクラブ空洞で正面衝突に変換し（図 7）、2＋1 自由度にし、そしてさらに x 方向のチューンを 0.5 に近づけ、極限的に1＋1＋1 自由度に近づけることで、共鳴、カオスによるビームサイズ肥大を押さえ込み、ビームビーム限界を高めるのである。最後に図 8 にクラブ衝突と交差角衝突のルミノシティを示す。

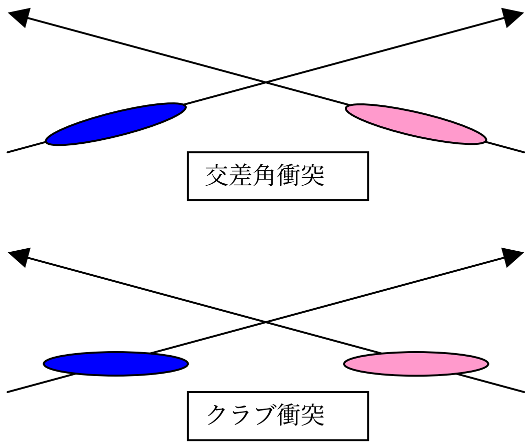

図 7　クラブ衝突の模式図

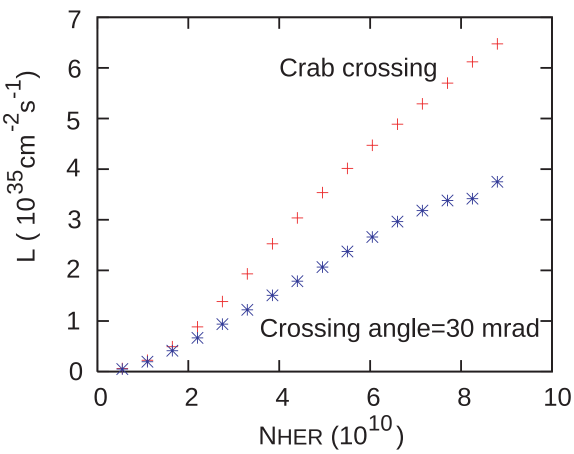

図 8　クラブ衝突と交差角衝突のルミノシティ

Super KEKB のパラメータを使用。横軸は HER バンチ内の粒子数で設計値は 5.5×10^{10} 。